TD 31 : Matrices et applications linéaires

Matrices de vecteurs et d'applications

1 ★ Soit $\mathcal{B} = ((1,2,-2), (-4,1,3), (0,5,-3))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (8,3,-3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

2 ★ (De morphisme à matrice) Déterminer les matrices dans les bases canoniques des morphismes suivants :

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par
$$f(x,y,z) = (-x+2z, 3x-4y, -5x+6z, -7y+8z)$$
2) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par
$$f(P) = 2P - XP'$$
3) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$, où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
4) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par
$$f(P) = Q(X+2) - Q(X)$$
avec Q un polynôme tel que $Q' = P$.

3 ★☆ (De matrice à morphisme) On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
Déterminer les expressions des morphismes f et g canoniquement associés à A et B. Déterminer, lorsque cela a un sens, les matrices dans les bases canoniques de $f+2g$, de $f\circ g$, de $g \circ f$, de f^{-1}, de g^{-1}, de $(f\circ g)^{-1}$ et de $(g\circ f)^{-1}$.

4 ★☆ Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par
$$f(P) = P(X+1) + P(X)$$
1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques (de départ et d'arrivée).
2) Montrer que f est un isomorphisme, et déterminer la matrice associée à f^{-1} dans les bases canoniques.
3) Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. En déduire l'expression de $f^{-1}(aX^2+bX+c)$.
4) Avec la même méthode, déterminer l'expression des applications réciproques des morphismes suivants :
   (a) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par
   $$f(P) = 2P - P' + 2P(1)$$
   (b) $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(f) = f' - f$, avec $E = \mathrm{Vect}(\mathbb{1}, \cos, \sin)$, où $\mathbb{1}$ désigne la fonction $x \mapsto 1$.

5 ★★ (Endomorphismes nilpotents) On notera 0 l'application nulle de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$, où l'on note $f^k := \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{k \text{ fois}}$.

1) Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(a) \neq 0_E$.
2) Démontrer que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, qu'on notera A.
4) Déterminer le commutant de A, i.e. l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
5) Soit $F = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g\circ f = f \circ g\}$. Déduire de la question précédente que $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, f, f^2)$, où l'on note id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Changements de base(s)

6 ★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$f(x,y) = (3x-y, -2x+7y)$$
1) Écrire la matrice A canoniquement associée à f.
2) Soit $u = (1,-1)$ et $v = (2,3)$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer la matrice de f dans la base (u,v).

7 ★★☆ Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

1) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_c$ et la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}$.
2) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$f(x,y,z) = (2x+2y+z, -2x-y, x+y-z)$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f \circ f \circ f$.

8 ★★☆ Soit $M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est M. Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \qquad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$$
$$e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

9 ★★☆ Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, avec

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0 \right\}$$
$$G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

1) Déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à F et G.
2) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
3) En déduire une expression de $p(x,y,z)$.

10 ★★☆ On pose $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et s l'endormorphisme canoniquement associé à S.

1) Montrer que s est une symétrie.
2) Déterminer ses éléments caractéristiques.
3) En déduire une base $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est simple et donner cette matrice.

11 ★★★☆ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

1) Pour un réel λ quelconque, calculer $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$.
2) En déduire les valeurs λ pour lesquelles f n'est pas bijective.
3) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda I_3)$ pour les valeurs de λ obtenues à la questions précédente.
4) En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Noyau, image, rang, matrices équivalentes

12 ★★☆ Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\, D \oplus \mathrm{Im}\, D$.

13 ★★ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels α et β telles que l'application linéaire canoniquement associée à $M_{\alpha,\beta}$ soit surjective.

14 ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que A s'écrit comme la somme de r matrices de rang 1.

15 ★★★☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $n-1$. Montrer que A n'est pas inversible, puis que A est équivalente à une matrice nilpotente, i.e. à une matrice N pour laquelle il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que N^k soit la matrice nulle.

Trace et matrices semblables

16 ★☆ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à B^k.

17 ★☆ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ les matrices $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont aussi semblables.

2) Est-ce que les matrices suivantes sont semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18 ★☆ En utilisant la trace, montrer qu'il n'existe pas deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

19 ★★ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On suppose que $\mathrm{Tr}(AA^\top) = 0$. Montrer que $A = 0$.

2) On suppose que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$. Déduire de la question précédente que $A = B$.